Mathématiques Financières
Chapitre 3 : Les Intérêts Composés

Pr. Fatima-Zahra AAZI
FSJES - AC

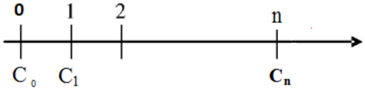
Sciences Économiques et Gestion (S2)
Ensembles {9, 10}

2019 - 2020

Définition

- On dit qu'un capital est placé à intérêts composés quand les intérêts de chaque période sont calculés sur la base de la valeur acquise de la période précédente, autrement, "le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement est ajouté au capital initial pour produire les intérêts de la période suivante", on dit que les intérêts sont capitalisés à la fin de chaque période.
- Contrairement au cas des intérêts simples, le montant des intérêts varie d'une période à une autre.
- Le intérêts composés sont généralement appliqués aux placements de long terme (durée supérieure à un an).

Formule générale



A la fin de la première période, la valeur acquise d'un capital C_0 placé à un taux d'intérêt composé i est :

$$C_1 = C_0 + C_0 \times i = C_0(1+i)$$

A la fin de la deuxième période :

$$C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$$

...

D'une manière générale, la valeur acquise d'un capital C_0 placé pendant n années à un taux d'intérêt composé i est :

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^n} \quad (1)$$

Remarques

- Les valeurs acquises d'une année à une autre sont les termes d'une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $(1+i)$ (on multiplie à chaque fois par $(1+i)$)
- Le montant total des intérêts produits au bout de n périodes est :

$$I_n = C_n - C_0$$

$$I_n = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$\boxed{I_n = C_0((1+i)^n - 1)}$$

- La période de capitalisation des intérêts (calcul et ajout au capital initial) est généralement annuelle mais elle peut aussi être semestrielle, trimestrielle ou mensuelle.

Formule de calcul de C_0 et n

En utilisant la formule (1) on peut calculer :

- C_0 à partir de C_n, n et i

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}}$$

- n à partir des 3 autres variables :

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

$$ln(1+i)^n = ln(\frac{C_n}{C_0})$$

$$n.ln(1+i) = ln(\frac{C_n}{C_0})$$

$$\boxed{n = \frac{ln(\frac{C_n}{C_0})}{ln(1+i)}}$$

Formule de calcul du taux i

En utilisant la formule (1) on peut calculer :

- i à partir de C_0, C_n et n

$$(1+i)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1}$$

Exemples

1. Calculer la valeur acquise et le montant des intérêts produits par un capital de 20.000 Dh placé à intérêts composés pendant 5 ans au taux annuel de 4%.
2. Calculer la valeur acquise d'un capital de 20.000 Dh placé à intérêts composés pendant 5 ans et 7 mois au taux annuel de 4%.
3. Quel capital faut-il placer à intérêts composés au taux de 3.5% pendant 4 ans pour obtenir une valeur acquise de 30.500 Dh ?
4. Au bout de combien de temps, un capital de 20.000 Dh placé à intérêts composés au taux de 6% peut il atteindre une valeur acquise de 25.000 Dh ?
5. Pour un capital initial de 20.000 Dh, quel est le taux qui permet d'obtenir une valeur acquise de 24.000 après 4 ans ?

Capitalisation vs Actualisation

Quand on calcule la valeur acquise, on parle d'une capitalisation : calcul de la valeur d'une somme ou d'un capital à une date future.

La valeur future d'un capital est différente de sa valeur aujourd'hui, la différence est la valeur du temps qui sépare les deux dates.

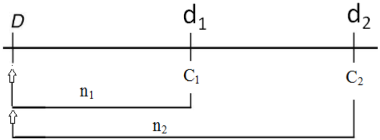
L'actualisation, est l'opération inverse de la capitalisation, elle consiste à calculer la valeur aujourd'hui appelée valeur actuelle d'une somme future.

Par conséquent, C_0 est la valeur actuelle de la valeur future C_n.

L'actualisation est d'une grande utilité pour la comparaison des modes de paiement par exemple, les calculs relatifs à l'équivalence des effets ...

Équivalence des capitaux/effets

Comme pour les intérêts simples, deux ou plusieurs capitaux sont équivalents à intérêts composés si leurs valeurs actuelles (calculées au même taux) à une date donnée sont égales.



A la date D, les capitaux C_1 et C_2 sont équivalents si et seulement si :

$$C_1(1+i)^{-n_1} = C_2(1+i)^{-n_2}$$

Équivalence des capitaux/effets

De même, Pour remplacer plusieurs effets/capitaux par un seul, il faut que la valeur actuelle du nouvel effet soit égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets.

Contrairement au cas des intérêts simples où la date d'équivalence est unique, à intérêts composés, si des capitaux sont équivalents à une date, ils le sont également à toute autre date.

Exemples

1. Quel capital faut-il placer aujourd'hui au taux de 6% (intérêts composés) pour obtenir une valeur de 50.000 Dh dans 3 ans ?
2. Un magasin propose deux formules de paiement pour une certaine marque/modèle d'ordinateurs :
   Payer 7000 Dh comptant (immédiatement) ou payer (par dépôt de chèques) 3700 Dh dans un an et 3900 Dh dans deux ans. Si le taux d'intérêts (d'actualisation) est de 6%, quelle formule faut-il choisir ?

Taux proportionnels

Les taux utilisés pour le calcul des intérêts sont généralement des taux annuels. Parfois, il serait utile d'utiliser des taux de durée plus courte (semestriels, trimestriels ou mensuels)

En divisant le taux annuel i par le nombre de périodes dans l'année, on obtient un/des taux appelés proportionnels au taux i. Ainsi, les taux semestriel (i_s), trimestriel (i_t) et mensuel (i_m) correspondant à i sont respectivement :

$$i_s = \frac{i}{2}$$

$$i_t = \frac{i}{4}$$

$$i_m = \frac{i}{12}$$

Taux proportionnels - Exemple

Calculer la valeur acquise d'un placement de 20.000 Dh placé pendant un an au taux annuel de 8%. Comparer le résultat avec la valeur acquise calculée avec le taux trimestriel proportionnel. Ces valeurs sont elles égales ?

1.

$$C_1 = C_0(1+i)^1 = 20.000(1,08) = 21.600$$

2. La valeur acquise en utilisant le taux trimestriel proportionnel est :

$$i = 8 \rightarrow i_t = \frac{8}{4} = 2$$

$$C_4 = C_0(1+i_t)^4 = 20.000(1,02)^4 = 21.648,6$$

$\rightarrow$ Le taux proportionnel ne permet pas d'avoir la même valeur acquise.
Il est nécessaire de chercher un taux équivalent qui donne la même valeur acquise au bout de la même période.

Taux équivalents

A partir de l'exemple, on comprend que deux ou plusieurs taux sont dits équivalents s'ils donnent la même valeur acquise au bout de la même période (pour le même capital initial bien évidemment)

Pour le capital de 20.000 Dh de l'exemple précédent, on cherche le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 8% comme suit :

$$C_0(1+i)^1 = C_0(1+i_t)^4$$

$$1+i = (1+i_t)^4$$

$$i_t = (1+i)^{1/4} - 1$$

Pour

$$i = 8\% \rightarrow i_t = 1,94\%$$

On remarque que le taux équivalent est différent (inférieur dans ce cas) au taux proportionnel.

Taux équivalents

De la même manière, on trouve les formules pour calculer les taux semestriel i_s et mensuel i_m respectivement :

$$i_s = (1+i)^{1/2} - 1$$

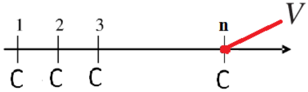
$$i_m = (1+i)^{1/12} - 1$$

Exemples :

1. Calculer les taux mensuels proportionnel et équivalent au taux annuel de 6%
2. Calculer le taux trimestriel équivalent au taux semestriel de 6%

Cas des versements constants

Comme pour les intérêts simples, on peut calculer la valeur acquise V d'un ensemble de versements constants.



Au moment du dernier versement, la valeur acquise d'un ensemble de versements annuels C est :

$$\boxed{V = C \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Calcul de la valeur acquise

Démonstration :

La valeur acquise V est la somme des valeurs acquises de tous les versements :

$C(1+i)^{n-1}$ (le premier versement est placé pendant n-1 années)
$C(1+i)^{n-2}$ (le deuxième versement pendant n-2 années)
$C(1+i)^{n-3}$
...
$C(1+i)$
C (le dernier versement n'ayant pas produit d'intérêt)

$$V = C + C(1+i) + ... + C(1+i)^{n-3} + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1}$$

Calcul de la valeur acquise

On remarque que pour passer d'un terme à un autre, on multiplie par $(1+i)$, il s'agit donc des n termes d'une suite géométrique de premier terme C et de raison $(1+i)$

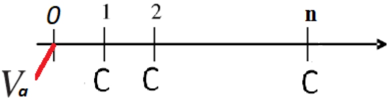
La somme de ces termes V est :

$$V = C \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V = C \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Calcul de la valeur actuelle

En plus du calcul de la valeur acquise, il est parfois utile de calculer la valeur actuelle d'un ensemble de versements constants. C'est le cas par exemple d'un individu qui va percevoir une certaine somme C pendant n années et qui cherche à calculer l'équivalent des n sommes aujourd'hui.



$$\boxed{V_a = C \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Cas des versements constants - Exemple

Un individu place annuellement 5000 Dh pendant 5 ans au taux annuel de 4%. Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement

Travail A Faire

Exercices

Série 2 de TD